

粘弾性体における波動伝搬条件と波動速度に関する考察

飯 田 汲 事

Some Consideration on the Wave Velocity and Wave Propagation Conditions in a Visco-elastic Solid

Kumizi IIDA

本論文は粘弾性体における波動伝搬の条件および波動速度について理論的に若干の考察を加えたものである。粘弾性体として Maxwell 型, Voigt 型の一般形を用い波動論が適用できる条件を論じ, 波動伝搬の厳密な積分計算の困難性および波動伝播のエネルギー条件, 複素弾性率の形や値の条件と波動速度との関係を示したものである。

1. 緒 言

粘弾性体の挙動を示す力学的モデルには, Maxwell 型, Voigt 型が基本的なものとして用いられている。これらはばねとダッシュポットの 2 要素を直列または並列に結合したものであり, 数式的取扱いが比較的簡単であるため種々応用されており, 波動論にも適用されている。しかし両者とも種々の欠陥のあることもすでに知られている。すなわち Maxwell 型では緩和時間が短かすぎるし, また Voigt 型では波面の速さが無限大になるほか, 単一のパルスに対しては単一のパルスが対応するものの, 波動の繰返しまたは振動の持続性がでてこないことなどの欠陥がある。ただこの場合, 力学的モデルはばねとダッシュポットの単一のものを用いているが, 大部分の粘弾性体は多くのばねおよびダッシュポットの組合わせを使用することによって近似させることができるわけであり, これらは一般化された Voigt 模型 (V-模型) または Maxwell 模型 (M-模型) と等価であることが示されている¹⁾。したがってこの場合, これらいずれかの模型の粘弾性体内の波動の様子がわかるならば, それは小なくとも有限個のばねとダッシュポットの結合によって近似される粘弾性体の振動的性質を示すわけである。

粘弾性体の振動的性質はほとんどすべての場合, 定常的な振動による測定がなされているが, それをそのまま非定常的な波動に適用するためには多少の考慮がなされなければならない。このような粘弾性体の波動に関して以下に一般的な形で少しく述べてみる。

2. 粘弾性体における波動

一般に線型粘弾性体の応力-ひずみ関係は次式で与えられる。

$$a_m \frac{\partial^m S}{\partial t^m} + a_{m-1} \frac{\partial^{m-1} S}{\partial t^{m-1}} + \cdots + a_0 S = b_n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^n} + b_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon}{\partial t^{n-1}} + \cdots + b_0 \varepsilon \quad (1)$$

ここに S は応力, ε はひずみであり, $a_m, a_{m-1}, \dots, b_n, b_{n-1}, \dots$ は定数である。(1)において

$$\left. \begin{aligned} g &= a_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \cdots + a_0 \\ f &= b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} + b_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + b_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおけば

$$S = G \varepsilon \quad (3)$$

となる。ただし

$$G \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = f \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) / g \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4)$$

であり, $f(x)$ は x の n 次式, $g(x)$ は x の m 次式である。 G は複素弾性定数を表わす。

今定常的なひずみとして

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

とすると, (3)より

$$S = G(i\omega) \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (6)$$

となる。 G を書きかえて

$$G(i\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = |G(\omega)| e^{i\delta} \quad (7)$$

とすれば, 応力 S は

$$S = |G(\omega)| \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (8)$$

で表わされる。そこで粘弾性体中の単位体積内で 1 周期の間になされる仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= \oint (\text{Real } S) d(\text{Real } \varepsilon) \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}(S) \cdot \text{Re} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt \end{aligned} \quad (9)$$

で表わされるから, (8), (9)から

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \pi |G(\omega)| \sin \delta = \frac{\pi}{2} \varepsilon_0^2 B(\omega) \quad (10)$$

となる。

粘弾性体中では運動のエネルギーの損失があるわけであるから, 1 周期後の仕事は正で, $\omega < 0$ のときは積分回路は時間的な逆行を意味するわけで, それを考えると仕事は ω によって変わり

$$W \geq 0 \quad \text{は} \quad \omega \leq 0 \quad (11)$$

に対応するわけである。したがって $G(i\omega)$ の虚部は ω の奇関数で ω と同符号を持たなければならない。これは G の形に対する条件である。

$$\text{また} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{pt} \quad (12)$$

のような周期的な変化のない場合をみると, 応力も実関係でなければならないので (1) における $\partial/\partial t$ の係数 $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ 等はすべて実数でなければならない。

一般に平面波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = E \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$E \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{G \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)} \quad (14)$$

で表わされるが, ここに u は変位であり, ρ は密度, E は Compliance である。 u の Laplace 変換 $L(u)$ は

$$L(u) = u(p) = \int_0^\infty u(t) e^{-pt} dt \quad (p > 0) \quad (15)$$

であり, また

$$\left. \begin{aligned} L[u^{(1)}(x, t)] &= pU(p) - u(x, 0) \\ L[u^{(2)}(x, t)] &= p^2 U(p) - pu(x, 0) - u'(x, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ L[u^{(m)}(x, t)] &= p^n U(p) - \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r-1} u^{(r)}(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

が求められるが, $t=0$ で $u=0, \partial u/\partial t=0$ なる初期条件を考えれば (13) は Laplace 変換により

$$\frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} = E(p) p^2 U(x, p) \quad (17)$$

となり, その解は

$$U(x, p) = U(0, p) e^{\pm p \sqrt{E(p)} x} \quad (18)$$

となり, これを逆変換すると

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L^{-1}[U(x, p)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f-i\infty}^{f+i\infty} e^{pt} U(0, p) e^{t \pm x \sqrt{E(p)} p} dp \end{aligned} \quad (19)$$

ここに f は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |e^{-ft} u(x, t)| dt < \infty$$

を満たす実数であり, $u(x, t)$ が有限であるとすれば $f > 0$ でよい。

境界条件の一例として $t > 0$ なる時間に対して定常的な振動を行なう場合を考えると

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad \text{で} \quad u &= e^{-i\omega t} \quad t > 0 \\ u &= 0 \quad t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

であるから

$$\begin{aligned} U(0, p) &= L[u(0, x)] = \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{i\omega + p} \end{aligned} \quad (21)$$

となり, 右方へ進行する波は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f-i\infty}^{f+i\infty} \frac{e^{\{t-x\sqrt{E(p)}\}p}}{i\omega + p} dp \\ &\quad f > 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

波動の速さが有限であるためには, どのような条件が考えられるかを考える。そのためにまず複素弾性定数 $G(p)$ が $p \rightarrow \infty$ のとき有限であり, また 0 でもないとする。したがって (4) より

$$G(p) = \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0} \quad (23)$$

であるから

$$n = m \quad (24)$$

である。よって $\lim_{p \rightarrow \infty} G(p) = \rho C_\infty^2$ とすれば,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{E(p)} = \frac{1}{C_\infty} \quad \text{となり, (23) から } \rho C_\infty^2 = \frac{b_n}{a_m}$$

となる。したがって (22) における積分路は

$t-x/C_\infty < 0$ のときは $R_0(p) > 0$ の半円 (図 1A),
 $t-x/C_\infty > 0$ のときは 図 1B の半円に沿う積分は 0 と

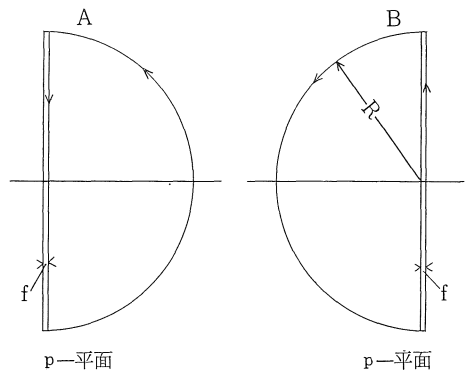


図 1 p-平面

なる。すなわち波面速度が有限であるためには、 $R_e(p) > 0$ に対して $E(p)$ は原点も極も存在することはできない。 $E(p)$ 、したがって $G(p)$ の原点および極は虚軸の左側になければならない。これは (23) において $f(p)=0$ 、 $g(p)=0$ の根はすべて虚軸の左側にあることを示すもので、この条件は実係数 n 次方程式の根はすべて虚軸の左側にあるための条件である。これは代数学における Hurwitz の定理の応用である Hurwitz の問題として解が与えられているので、それを用いると

$$f(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n \quad (25)$$

において

$$f(iz) = U(z) + iV(z) \quad (26)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= b_0 - b_2 z^2 + b_4 z^4 - \dots \\ V(z) &= z(b_1 - b_3 z^2 + b_5 z^4 - \dots) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。よっていま

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= b_0 - b_2 x + b_4 x^2 - \dots \\ v(x) &= b_1 - b_3 x + b_5 x^2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とおくと (26) は

$$f(iz) = u(z^2) + izv(z^2) \quad (29)$$

となるので、 $u(x)$ 、 $v(x)$ の根はすべて正数で互に隔離しかつ最小の根は $u(x)$ に属し、また $u(x)v(x)$ は $u(x)$ が 0 になるときに常に + から - に変わることが必要でかつ十分な条件である。 $g(p)$ についても同様であり、それは

$$g(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n \quad (30)$$

において

$$\left. \begin{aligned} \xi(x) &= a_0 - a_2 x + a_4 x^2 - \dots \\ \eta(x) &= a_1 - a_3 x + a_5 x^2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とおくと (29) と同様に

$$g(iz) = \xi(z^2) + iz\eta(z^2) \quad (32)$$

となるので、 $G(i\omega)$ は (4) により

$$G(i\omega) = \frac{u(\omega^2) + i\omega v(\omega^2)}{\xi(\omega^2) + i\omega\eta(\omega^2)} \quad (33)$$

として表わされるから、これを変形して

$$G(i\omega) = \frac{u\xi + \omega^2 v\eta}{\xi^2 + \omega^2 \eta^2} + i \frac{\xi v - u\eta}{\xi^2 + \omega^2 \eta^2} \omega \quad (34)$$

となる。したがってエネルギーの条件 (11) は $\xi(x) = 0$ 、 $\eta(x) = 0$ の根が隔離していることから $\xi^2 + \omega^2 \eta^2 \neq 0$ であるので

$$\xi v - u\eta > 0 \quad \omega \text{ は実数} \quad (35)$$

となる。ここに $u(\omega^2)$ 、 $v(\omega^2)$ 、 $\xi(\omega^2)$ 、 $\eta(\omega^2)$ はそれぞれ (28)、(31) で与えられる。したがって (23)、(35) および u 、 v 、 ξ 、 η に関する条件を満足する実数 a_0 、 a_1 、 \dots 、 a_m 、 b_0 、 b_1 、 \dots 、 b_n は分散性粘弾性体の振動様式を表現

するのに十分である。

一般化された Maxwell および Voigt 模型について上の条件をみると、満足的であることがわかる。すなわち

(i) 一般化された Maxwell 模型の場合

応力 S はこの場合 $S = \sum_i S_i$ で表わすとすれば

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = E_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{S_i}{\eta_i} \quad (36)$$

で表わされるから $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{pt}$ となる場合には (36) により

$$S = \sum_i S_i = \left(\sum_i \frac{E_i}{1 + \frac{1}{p\eta_i}} \right) \varepsilon \quad (37)$$

が得られるので

$$G(p) = \sum_i \frac{E_i p}{p + \frac{1}{\eta_i}} \quad (38)$$

となり、 $G(p)$ は $G(p)$ の極以外で連続であり、また $p = -\frac{1}{\eta_i}$ で極をもつので p として実数をとると、 $G(p)$ は図 2 に示したような形をとるはずである。極の数は一般に n 個で、 $G(p)$ は $p < 0$ で $(n-1)$ 個の 0 点および $p=0$ の 0 点をもつ。 $G(p)$ を $f(x)/g(x)$ の形に書きなおすと $g(x)$ 、 $f(x)$ はともに x の n 次式になるので $g(x)$ 、 $f(x)$ は負の実根のみをもつことになる。 $p=0$ は負とはいえないが、0 に近い負の値で 0 点をもつと考えればよい。またそれらの実根の絶対値は $|1/\eta_i|$ の最大値を越えない。さらに

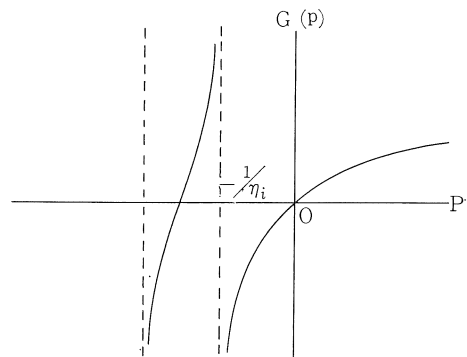


図 2

$$G(i\omega) = \sum_i \frac{E_i \cdot i\omega}{i\omega + \frac{1}{\eta_i}} = \sum_i \frac{E_i \omega^2}{\omega^2 + \left(\frac{1}{\eta_i}\right)^2} + \sum_i \frac{E_i \frac{\omega}{\eta_i}}{\omega^2 + \left(\frac{1}{\eta_i}\right)^2} i$$

となるので、(34) と同形となる。よって (11) のエネルギーの条件を満足することがわかる。

(ii) 一般化された Voigt 模型の場合

(i) と同様にして、この場合のひずみ ε は

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

であり応力 S は

$$S = E_i \varepsilon_i + \lambda_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} \quad (40)$$

で表わされるから、この場合の $G(p)$ は

$$G(p) = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{E_i + p\lambda_i}} \quad (41)$$

与えられる。 $1/G(p)$ のグラフは図3のようになり、 $G(p)$ もまた n 個の 0 点および n 個の極をもつが、 $p = \infty$

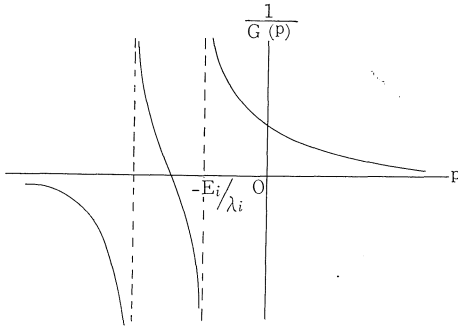


図 3

の極になっている。したがって単純な Voigt 模型では $\omega \rightarrow \infty$ のときに $G(p)$ または $G(i\omega)$ は無限大となり、波面速度は無限大となる困難が生ずる。これは前述の速度の有限なることに反するのであるが、この困難は Voigt 型の一つで $\lambda = 0$ とすれば除かれる。

(iii) Maxwell 型と Voigt 型の結合の場合

この場合には Voigt 要素と Maxwell 要素とが混合するが、粘弾性体の理論では Voigt 模型にはそれと等価な Maxwell 模型が必ず存在するから、この場合にも (i) または (ii) の場合と同様に考えられる。しかも $G(p)$ が $\lambda + 2\mu$ の形になるので、 λ および 2μ の極の数は両者の和となり、当然 $\lambda + 2\mu$ は同数の 0 点を持つことになる。結局 Maxwell 模型、Voigt 模型の場合は η_i , G_i , λ_i を適当な正数または 0 にとれば

$$G(p) = \frac{f(p)}{g(p)}$$

の 0 点および極はすべて負実軸上に存在し、かつ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G(p) = -\text{一定} < \infty$$

であり、またエネルギーの条件を満足することがわかる。

(iv) Maxwell 模型と Voigt 模型で表わせない模型の場合

Maxwell 模型および Voigt 模型では弾性定数 $G(p)$ が p の負実数のみに対して極および 0 点を持ちうるが、このことは $u(x, t)$ の積分路に沿う積分で、粘弾性を示

す項が常に $p = \text{実数}$ に関係するので振動的な性質を示さなくなる。振動項をもたせる一つの模型として $G(p)$ の 0 点および極が p -平面の第 2, 第 3 象限にある場合を考えればよいであろう。例えば次のようなものが考えられる。

Maxwell 模型の中で粘性を示すダッシュポットがさらに振動数に関係があるとするが、一般的な関係を入れると非線形になるので (36) において η に

$$\eta = \eta_0 + \frac{k}{S} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (42)$$

とする (k は定数) と、緩和時間 η は応力の大きさにはよらないが、応力の時間的変化に対して変わるものとする。そのときは (36) と (42) から

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{S}{\eta_0 + \frac{k}{S} \frac{\partial S}{\partial t}} \quad (43)$$

が得られるので、 $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{pt}$ のひずみに対しては

$$G(p) = \frac{Ep(\eta_0 + kp)}{kp^2 + \eta_0 p + 1} \quad (44)$$

が得られる。故に $\eta_0 > 0$, $k > 0$ かつ $\eta_0^2 - 4k < 0$ ならば $G(p)$ の極は第 2 象限および第 3 象限にあるから積分の中に $e^{i\omega t}$ 型の項が入る可能性がある。そしてエネルギーの条件は $p = i\omega$ として

$$G(i\omega) = -\frac{\omega^2(k^2\omega^2 - k + \eta_0^2)}{1 + k\omega^2 + \eta_0^2\omega^2} + \frac{\eta_0\omega^3 i}{(1 + k\omega^2)^2 + \eta_0^2\omega^2} \quad (45)$$

となるから条件は満たされる。

(v) Norman Ricker 型の場合

Norman Ricker による wavelet theory の基礎になる粘性の性質は

(a) 定常波の伝播速度は一定 (v)

(b) 波動の振幅は振動数 ν の関数

として考えられている。

数式で示すと次式が解となる。Ricker の記号²⁾

により

$$x_1 = Ae^{-\alpha x} e^{i(2\pi\nu/\nu)(x - vt)} \quad (46)$$

$$\text{ただし } \alpha = k\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^q \quad (47)$$

である。これから逆に波動方程式を作ると、波数 $n = 2\pi\nu/\nu$ として

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{n^2 v^2}{(n - i\alpha)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (48)$$

であるから (14) より

$$\frac{1}{E(in)} = \frac{1}{\rho} G(in) = \frac{n^4 v^2 - n^2 v^2 \alpha^2 + 2n^3 v^2 \alpha i}{(n^2 + \alpha^2)^2} \quad (49)$$

となる。よってエネルギーの条件(11)より α は n の偶関数でなければならない。(48)より

$$\sqrt{E(p)} = \frac{1}{v} - \frac{i\alpha}{nv} \quad (50)$$

となる。 $\alpha = k' |n^q|$ のものは解析関数でなくなるので、一応ここでは $q=4$ の倍数を採用する。 $n = -ip$ とすれば

$$\sqrt{E(p)} = -\frac{1}{v} + \frac{\alpha}{pv} \quad (51)$$

となる。ただし $\alpha = k' p^q$ である。したがって(22)における e の部分は

$$\exp(t - x\sqrt{E(p)}) = \exp\left\{\left(t - \frac{x}{v}\right)p - \frac{k'}{v}p^q\right\}$$

となるので、積分路は $p^q = \text{一定でない限り右へ廻わすことも左へ廻わすこともできない}$ 。すなわち contour integral の方法で(22)の値を求めることができなくなる。 $p \rightarrow \infty$ で $G(p)$ は 0 にも ∞ にもならない有限の値に近づくことは、この方法にとって必要であるから、この種の形は $\alpha = \text{一定の場合以外は取扱えない}$ 。

$\alpha = \text{一定}$ すなわち $q=0$ ならばこの方法による積分は可能で(52)より明らかであるが、 $t - x/v < 0$ では $\Psi(x, t) = 0$ となる。すなわち波面速度は v を越えない。Ricker の論文では波面速度についてはその取扱いは十分でない。Ricker の波の始めの形では $f(x) \equiv 0, t \geq 0; f(x) = 0, t < 0$ でなければならない。 $x=0$ で $f(t)$ を定義しなければならない。 $f(t) \equiv 0, t \geq 0; f(t) = 0, t < 0$ としてもよい。そうすれば結局 $f(x, t) \equiv 0, x - vt > 0; f(x, t) = 0, x - vt < 0$ となって波面速度は v を越すことはない。

3. Voigt 型模型について

前述のように Voigt 模型の波面速度は無限大になるが、そのような波動は実際上ほとんど存在しないことは次のようにして示される。

Voigt 模型に対して $t > 0$ で急に始まる変位を与えるためには無限大の応力が必要であるので、ここでは $t > 0$ で急に始まる応力に対して変位を求める。よって境界条件は

$$x=0 \text{ で } \sigma(0, t) = G\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon = G\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (53)$$

であり、波動方程式は(13)で与えられるから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{E(\partial/\partial t)} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (54)$$

$$\text{となり、} \quad \sigma(0, t) = \rho \frac{1}{\sqrt{E(\partial/\partial t)}} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (55)$$

であり、Laplace の変換を用いると

$$L[\sigma(0, t)] = S(0, p)$$

を与えられたものとすれば

$$L[\sigma(x, t)] = \rho \frac{p}{\sqrt{E(p)}} U(x, p) \quad (56)$$

となる。(18)より

$$U(x, p) = \frac{S(0, p)\sqrt{E(p)}}{\rho p} e^{\pm \sqrt{E(p)}x} \quad (57)$$

となり、したがって(19)は

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f-i\infty}^{f+i\infty} S(0, p) \frac{\sqrt{E(p)}}{p \rho} e^{(t - \sqrt{E(p)}x)p} dp \quad (58)$$

となる。

前と同様にして

$$\left. \begin{aligned} \sigma(0, t) &= \rho e^{i\omega_0 t} & t &\geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

と考えれば

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f-i\infty}^{f+i\infty} \frac{\sqrt{E(p)} e^{(t - \sqrt{E(p)}x)p}}{p(p + i\omega_0)} dp \quad (60)$$

となる。Voigt 模型では $p \rightarrow \infty$ のとき $E(p) \rightarrow 0$ になるのであるが、(ii)で述べたように

$$E(p) \rightarrow \frac{1}{p} \left(\Sigma - \frac{1}{\lambda_i} \right)$$

において弾性が十分大きいとは $E(p) = \text{一定}$ となる。故に $p \gg i\omega$, $\sqrt{|p|} = R$ なる円周(図4)上の積分は $1/R$ の order である。故に $t - \sqrt{E(i\omega)}x$ の実部が正ならば Γ_1 上の積分は常に $1/R$ の order より大きくなり、また $t - \sqrt{E(i\omega)}x$ の実部が負ならば Γ_2 上の積分は $1/R$ の order より大きくなり、ま

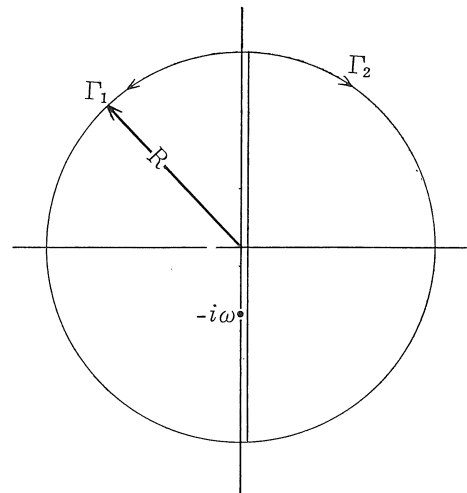


図 4

た右の半円内には極がないから $u(x, t)$ は

$$R_0(t - \sqrt{E(iR)} x) < 0 \text{ のとき } u(x, t) \leq -\frac{1}{R}$$

すなわち波数 ω_0 の伝搬速度を越している波動は $1/\omega_0$ 以下の order である。また $p = -i\omega$ の付近では被積分関数は大きくなるので、加えた振動数に対応する伝搬速度よりも僅かに早い波は無視できなくなる。

4. 結 論

任意の線形粘弾性に対応する $E(p)$ は簡単に作成できるが、積分(22)または(60)をかなりの精度で計算することはなかなか困難である。従来行なわれているように $\sqrt{E(p)}$ を p のべき級数に展開して、その一次または二次の項までとる計算は branch point をまわる積分を無視することになるので、 $p = -i\omega$ の極のところの補正項が計算されるのみである、その branch point をまわる計算値は小さなものではなく、加えた振動とほぼ等しくなるような場合があるので、粘弾性体中における波面の形を決定するのは困難となる。数学的には波面速度は

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{G(i\omega)/\rho}$$

であるが、この極限值が存在しない Voigt 模型の場合にも、波はだいたい加えた振動数に対応する伝搬速度で伝わりと考えると大差がない。いままでに調べた Maxwell 模型、Voigt 模型とともに $R_0[G(i\omega)]$ は ω の単調増加関数であるが、これがある ω に対して最大値を持つならばどのような波面になるか興味ある問題である。ただしこの場合に $G(i\omega)$ がエネルギーその他の条件を満足するかどうかはわからないので吟味しなければならない。

参 考 文 献

- 1) 岡小天, 岩波講座現代物理学 II E, 高分子の粘弾性, 岩波書店 1955年
- 2) Ricker, N., The Form and Nature of Seismic Waves and the Structure of Seismograms, *Geophysics*, **5**, 348—366 (1940)